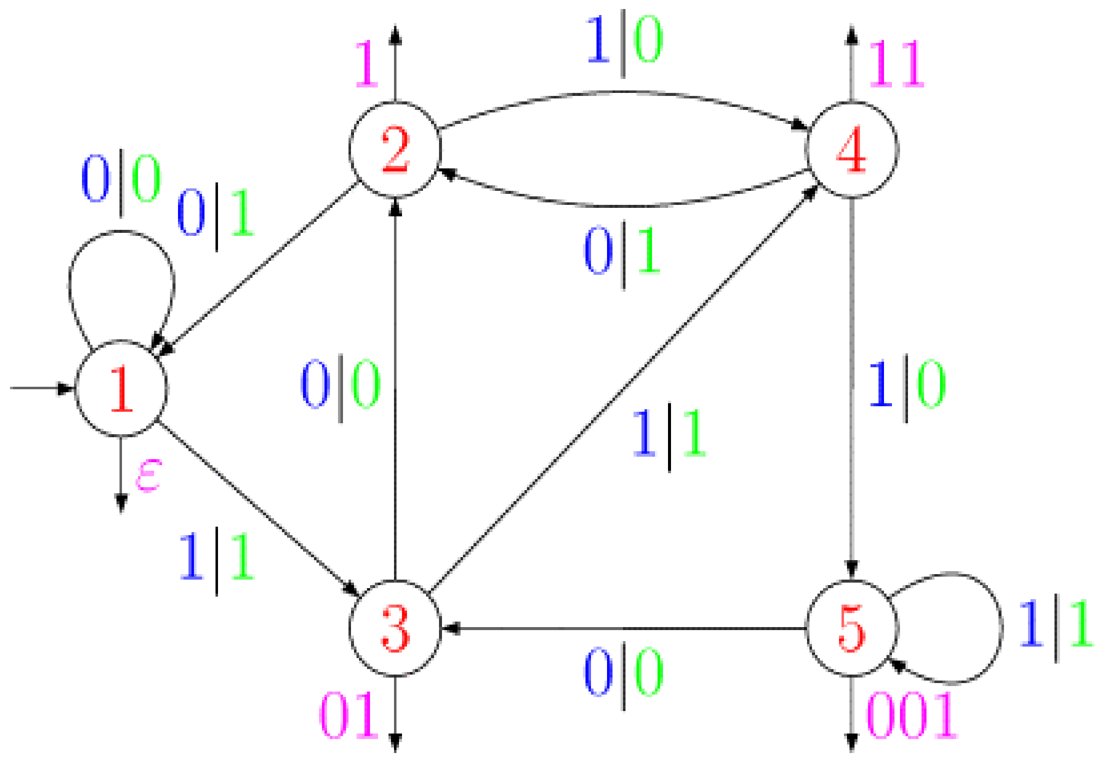
Petite Promenade ...
chez les Automa*thes*

K
A
F
E
M
A
T
H



S
E
M
A
I
N
E
des
M
A
T
H
S

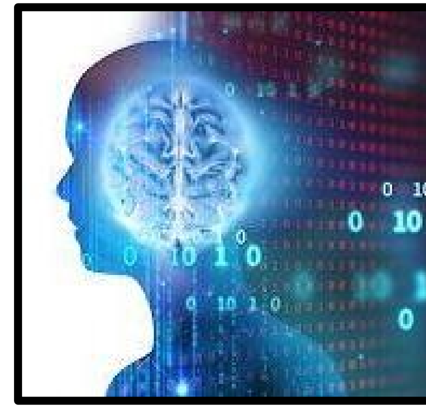
Chaque
Jour
Un Peu

«L'*in*humain d'aujourd'hui sera l'humain de demain, et c'est un automate»

MAJ :

13-03-2025

Petite Promenade chez les Automa*thes*



SEMAINE des MATHÉMATIQUES - 13 MARS 2025

SOMMAIRE

1

Les Automa*thes* sont parmi nous

On rencontre des **automates** :

- en électronique, en informatique,
- dans les transports, en domotique, en robotique, en biologie (génome),
- dans diverses industries, … etc.

1

Les Automa*thes* sont parmi nous

On rencontre des **automates** :

- en électronique, en informatique,
- dans les transports, en domotique, en robotique, en biologie (génome),
- dans diverses industries, … etc.

Mais aussi dans de nombreux domaines plus ‘’*théoriques*’’ :

- Linguistique, Recherche documentaire, Traitement de texte,
- Spécification et vérification de protocoles (mots infinis),
- Compression de données, Codage et Décodage,
- Circuits, Théorie du contrôle, Automatique, etc.

1 Les Automa*thes* sont parmi nous

On rencontre des **automates** :
- en électronique, en informatique,
- dans les transports, en domotique, en robotique, en biologie (génome),
- dans diverses industries, … etc.

Mais aussi dans de nombreux domaines plus ''*théoriques*'' :
- Linguistique, Recherche documentaire, Traitement de texte,
- Spécification et vérification de protocoles (mots infinis),
- Compression de données, Codage et Décodage,
- Circuits, Théorie du contrôle, Automatique, etc.

Mais savons-nous vraiment ce qu'ils sont ?
Et comment ils se définissent ?

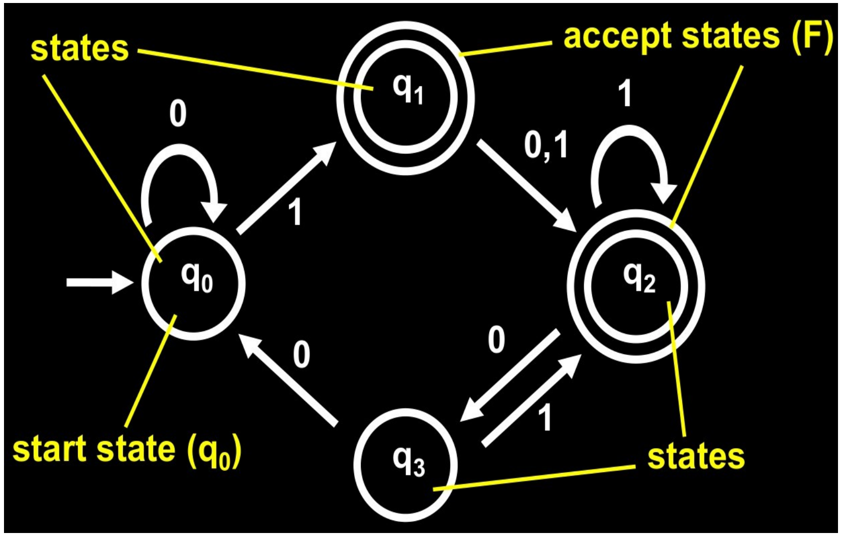
1-1) L'Univers de l'Automatique et des Automates ...

Si vous voulez vous lancer dans l'univers des systèmes automatisés (combinatoires, séquentiels), les différents types d'automates exigent des connaissances *théoriques* en :

- algèbre de Boole (table de Karnaugh),

- systèmes de numération,

- GRAFCET (Graphe Fonctionnel de Commande Étape Transition),



Etc.

Et bien sûr des connaissances *pratiques* sur tous les éléments mécaniques qui entrent dans le fonctionnement des automates ...

Aujourd'hui, nous nous limiterons à un bref aperçu des automates finis ...

1-2) Le Cas des Automates finis

Un **automate fini** est la donnée de 5 ensembles :

1 - un **alphabet d'entrée A** *fini*,

2 - un ensemble *fini* d'**états Q**, qui contient :

3 . un ensemble **D** des **états de départ** (initiaux),

4 . un ensemble **F** des **états d'acceptation** (finaux),

5 - un ensemble **δ** des **transitions**.

(une *transition* est une fonction à deux arguments : à un couple (état, lettre), elle fait correspondre un état.)

Un automate **fini** se représente par une **table de transition** :

		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	2	1
	2	3	2
	$3F$	3	3

Ici, <u>les 5 *ensembles*</u> sont :

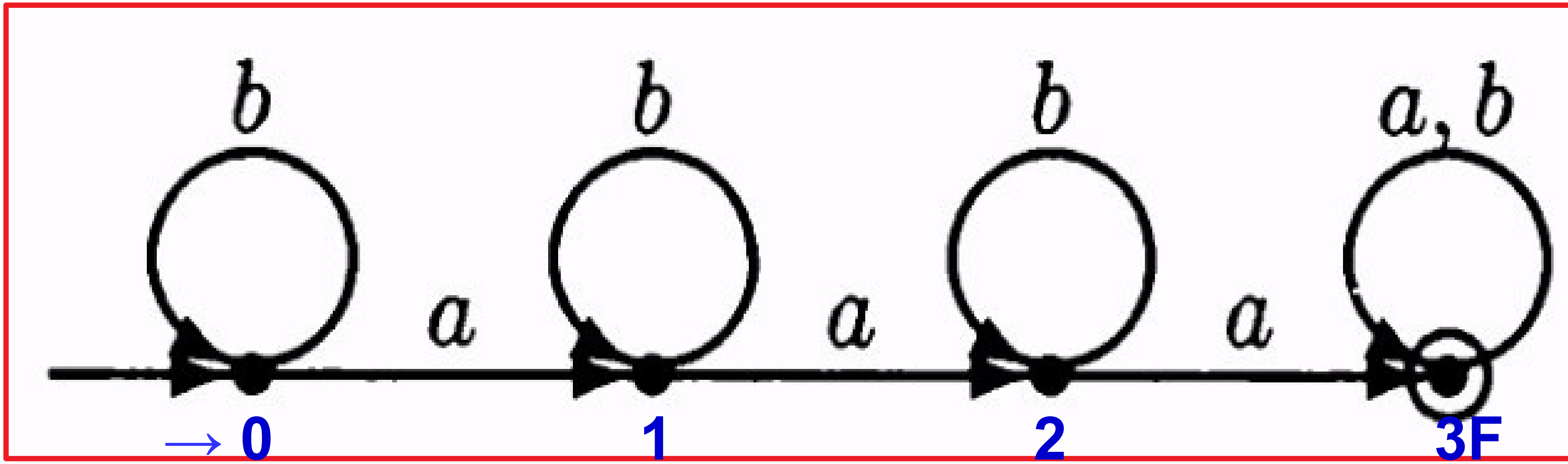
- l'alphabet **A**={a,b},
- l'ensemble d'états **Q**={0,1,2,3},
- l'ensemble de départ **D**={0},
- l'ensemble final **F**={3}.

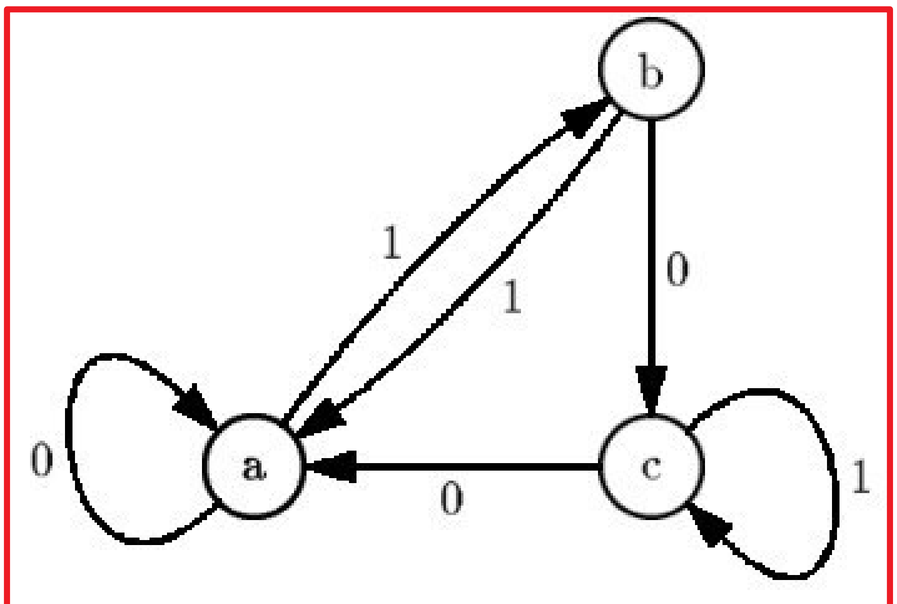
<u>la fonction **δ** de transition</u> est :

- d(0,a) = 1,
- d(1,a) = 2,
- d(2,a) = d(3,a) = 3,
- d(x,b) = x, avec x$\in${0,1,2,3}

		a	b
$\rightarrow$	0	1	0
	1	2	1
	2	3	2
	$3F$	3	3

… ou par un **graphe** ou **diagramme** :





2

Les Automa*th*es et les Maths

Il y a beaucoup de **maths** dans les **automates** !

Normal, car :

«La théorie des automates est née de la convergence de plusieurs courants scientifiques ...» (Pin Jean-Eric) :

2 Les Automa*th*es et les Maths

Il y a beaucoup de **maths** dans les **automates** !

Normal, car :

«La théorie des automates est née de la convergence de plusieurs courants scientifiques ...» (Pin Jean-Eric) :

- la **logique**, avec Church, Gödel et Turing, qui tentèrent de formaliser la notion de *calcul* et de *machine* ;

2 Les Automa*th*es et les Maths

Il y a beaucoup de **maths** dans les **automates** !

Normal, car :

«La théorie des automates est née de la convergence de plusieurs courants scientifiques ...» (Pin Jean-Eric) :

- la **logique**, avec Church, Gödel et Turing, qui tentèrent de formaliser la notion de *calcul* et de *machine* ;
- les **systèmes dynamiques discrets** (réseaux de communication, d'ordinateurs, etc), qui impliquent l'*ordonnancement* des tâches ;

2

Les Automa*thes* et les Maths

Il y a beaucoup de **maths** dans les **automates** !

Normal, car :

«La théorie des automates est née de la convergence de plusieurs courants scientifiques ...» (Pin Jean-Eric) :

- la **logique**, avec Church, Gödel et Turing, qui tentèrent de formaliser la notion de *calcul* et de *machine* ;
- les **systèmes dynamiques discrets** (réseaux de communication, d'ordinateurs, etc), qui impliquent l'*ordonnancement* des tâches ;
- la **théorie de l'information** de Shannon en 1948 et les problèmes de *codage* ;

2

Les Automa*thes* et les Maths

Il y a beaucoup de **maths** dans les **automates** !

Normal, car :

«La théorie des automates est née de la convergence de plusieurs courants scientifiques ...» (Pin Jean-Eric) :

- la **logique**, avec Church, Gödel et Turing, qui tentèrent de formaliser la notion de *calcul* et de *machine* ;
- les **systèmes dynamiques discrets** (réseaux de communication, d'ordinateurs, etc), qui impliquent l'*ordonnancement* des tâches ;
- la **théorie de l'information** de Shannon en 1948 et les problèmes de *codage* ;
- la **linguistique formelle** avec Chomsky.

3 Un Exemple Simple d'Automa*th*e Fini

Les **automates finis**, « introduits à l'origine en théorie des **langages formels**, un peu à la croisée de l'informatique théorique et de la linguistique, permettent de construire des suites ayant de nombreuses propriétés mathématiques. »

3

Un Exemple Simple d'Automa*th*e Fini

Les **automates finis**, « introduits à l'origine en théorie des **langages formels**, un peu à la croisée de l'informatique théorique et de la linguistique, permettent de construire des suites ayant de nombreuses propriétés mathématiques. »

Automate Fini et Expression Algébrique

Les *expressions algébriques* sont des *mots*, qu'on peut obtenir par des *automates finis*.

Un **automate fini** peut donc traduire une opération algébrique

Exemple : Lorsqu'on calcule les *carrés* formant la suite

$$S_1 = 4^2 , 34^2 , 334^2 , 3334^2 , 33334^2 , \ldots$$

on obtient la suite d'entiers

$$S_2 = 16, 1156 , 111556 , 11115556 , 1111155556 , \ldots$$

Le terme général de cette suite S_1 est :

$$\boxed{c_n^2 = \left(\frac{10^n}{3} + \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{10^{2n}}{9} + \frac{4 \times 10^n}{9} + \frac{4}{9}}$$

Voici les premiers termes de S_1 : (*)

$$n=0:\quad c_0^2 = \left(\frac{10^0}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{3}\right)^2 = \boxed{1^2} = \boxed{1}$$

$$n=1:\quad c_1^2 = \left(\frac{10^1}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{10^1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{10^1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \cdots = \boxed{4^2} = \boxed{16}$$

$$n=2:\quad c_2^2 = \left(\frac{10^2}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \cdots = \boxed{34^2} = \boxed{1156}$$

$$n=3:\quad c_3^2 = \left(\frac{10^3}{3}+\frac{2}{3}\right)^2 = \cdots\cdot = \boxed{334^2} = \boxed{111556}$$

(*) D'après TANGENTE-175-mars-avril 2017, p 48 et 51, exo 17505 : Carrés à répétition

Automate produisant une suite de carrés

T_1

On peut traiter les suites S_1 et S_2 comme des **chaînes de caractères** (chiffres), *i.e.* comme des **mots**. Pour la suite S_1, l'alphabet est $A_1=\{3,4\}$ et pour la suite S_2, l'alphabet est $A_2=\{1,5,6\}$. L'opération sur A_1 et sur A_2 est la **concaténation**.

L'**automate fini** T_1 permet d'obtenir en **n** étapes le **n**$_{\text{ième}}$ terme de la suite S_1.

Etape k	Opération k	Expression obtenue de n_k	Expression de n_k^2
1	Ecrire la chaîne "4"	4	4^2
2	Ecrire la chaîne de la forme : $\boxed{\text{"3"} \oplus n_{k-1}}$ concaténation	$\boxed{3}4$	34^2
3	idem	$\boxed{3}34$	334^2
4	idem	$\boxed{3}334$	3334^2
5	idem	$\boxed{3}3334$	33334^2
6	idem	$\boxed{3}33334$	333334^2

Un automate fini n'est pas unique généralement …

L'automate T_2 produit la suite S_2 des *carrés* de la suite S_1

S_2 =

4^2 = 16,
34^2 = 1156,
334^2 = 111556,
3334^2 = 11115556,
33334^2 = 1111155556, ...

Une procédure sur les **CHAINES** (avec concaténation) équivaut à une procédure sur les **NOMBRES** (avec opérations algébriques)

Autre **automate fini** traduisant une opération algébrique

T_2

Etape K	Opération K	Entier n_K
1	Ecrire l'entier 4^2	16
2	• Calculer $n_{K-1} - 1$ • Insérer la chaîne "$n_{K-1} - 1$" entre le 1er et le dernier caractère (chiffre) de la chaîne "n_{K-1}"	15 1156
3	idem	1155 111556
4	idem	111555 11115556
5	idem	11115555 1111155556

En guise de Dernier Mot ...

Les thèmes qui pourraient vous intéresser :

1 - Les aspects **théoriques** des automates : *langages* et automates, théorème de Kleene (https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Kleene), automates *déterministes*, etc.

2 - Les relations entre théorie des automates et la **combinatoire**, la théorie des **ensembles** (semi-anneau), l'**algèbre** (monoïde, semi-groupe) ou la théorie des **graphes**, etc.

3 - Les automates **programmables** pour … *automatiser* et *contrôler* les processus : automates modulaires, compacts ou de sécurité.
https://www.ip-systemes.com/details-qu+est+ce+qu+un+automate+programmable+industriel+-772.html#

Les Automathes vous disent

⟷

« A bientôt ! »

Quelques Références sur les Automates

Ouvrages ou articles sur les Automates … et les Maths

- **Allouche Jean-Paul**, Théorie des Nombres et Automates
- **Audin Michèle**, L'OULIPO et les mathématiques--Une description
- **Autebert Jean-Michel**, Théorie des langages et des automates
- **Bell Jason**, Additive Number Theory via Approximation by Regular Languages
- **Berstel Jean**, Mathématiques et informatique. Problèmes résolus
- **Berthé Valérie**, Combinatorics, automata and number theory
- **Hopcroft John E**, Introduction to automata theory, languages and computation (2007)
- **Perrin Dominique**, Infinite words--Automata,semigroups,logic and games
- **Rigo Michel**, Théorie des automates et langages formels
- **Sakarovitch Jacques**, Elements of automata theory
- **Séébold Patrice**, Théorie des automates
- **TutorialsPoint**, Automata Theory Tutorial